はじめに

難関大の理系の問題といえども数学である以上やることは決っています.
普段練習している通りに解答が書ければ，十分に合格点に辿り着けるはずです.
しかしながら普段の問題集の演習の場合には問題を解けても，入試問題となると途端に手が止ってしまう受験生が多いのも事実です.

それは入試問題に対する戦い方を練習していないことが原因です.
過去問を演習する一番大きな目的はそこです.
自分の頭の中にある知識を，どういう場面でどう使うのか，それが分かるようになる為の練習をこれから行なうことになります.
自分にはなかった知識に触れたときには，類題を探し出して練習しましょう.
自分が思いつかなかった発想に出会ったときには，どうしてそう思いついたのか真剣に考えましょう.

すべては訓練です.

それでは頑張りましょう.

堺　義明

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

難関国公立大数学Ⅲ対策講座

目　次

第１講　複素数と軌跡，積分評価と極限，面積で評価── p.4
第２講　複素数と漸化式，面積と極限，積分と漸化式─ p.10
第３講　複素数と漸化式, 三項間漸化式と極限, 面積で評価─ p.16
第４講　３次の面積と無限級数，不等式が成り立つ条件，斜回転体の体積─ p.22
第５講　ド・モワブルと不等式，増減と有理数解，回転体を平面で切る─ p.28
第６講　速度ベクトル, 共通接線と増減, 球の一部の体積─ p.34
第７講　楕円と接線, 不等式が成り立つ条件, 回転体の体積─ p.40
第８講　漸化式と不等式と極限，積分で表された関数，球を回転させた体積─ p.46
第９講　極値をもつことの証明, 不等式の不等式への応用, 球が外接するとき─ p.52
第10講　複素数の実部や絶対値, 積分と不等式と極限, 積分と漸化式─ p.58

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　複素数と軌跡，積分評価と極限，面積で評価

1　t を実数とするとき，2 次方程式

$$z^2+tz+t=0$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　この方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ．

(2)　(1)の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す．t が(1)で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ．

(3)　複素数平面上で，点 z が(2)の図形 C 上を動くとき，

$$w=\frac{iz}{z+1}$$

で表される点 w が描く図形を求め，図示せよ．　《05 九大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 $a>0$ を実数とする．$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，座標平面の 3 点

$$(2n\pi,\ 0),\ \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^{a}}\right),\ ((2n+1)\pi,\ 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし，

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}dx,\ C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}dx$$

とおく．

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ．

《15 東北大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少することを示せ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ．

(3) n を 3 以上の整数とするとき，不等式

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\frac{1}{\log 2}$$

が成り立つことを示せ．

《15 九大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　複素数と軌跡，積分評価と極限，面積で評価

1　t を実数とするとき，2 次方程式

$$z^2+tz+t=0$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　この方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ．

(2)　(1)の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す．t が(1)で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ．

(3)　複素数平面上で，点 z が(2)の図形 C 上を動くとき，

$$w=\frac{iz}{z+1}$$

で表される点 w が描く図形を求め，図示せよ．　《05 九大・理系》

【答】　(1)　$0<t<4$，$z=\dfrac{-t\pm\sqrt{4t-t^2}\,i}{2}$　　(2)　略　　(3)　略

【解説】　以下，虚数単位を i とする．

(1)　与式の判別式が負であればよいので $t^2-4t<0 \iff t(t-4)<0$ ゆえに $\boldsymbol{0<t<4}$.

また解の公式より $z=\dfrac{-t\pm\sqrt{t^2-4t}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{-t\pm\sqrt{4t-t^2}\,i}{2}}$.

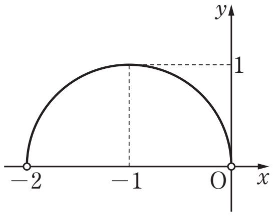
(2)　(1)より $z(t)=\dfrac{-t+\sqrt{4t-t^2}\,i}{2}$ である．ここで $x=-\dfrac{t}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{4t-t^2}}{2}$ とおくと，

$t=-2x$ より　$y=\dfrac{\sqrt{4(-2x)-(-2x)^2}}{2}$ かつ $0<-2x<4$

$\iff$　$y\geqq 0$ かつ $y^2=-2x-x^2$ かつ $-2<x<0$

$\iff$　$(x+1)^2+y^2=1$ かつ $y>0$

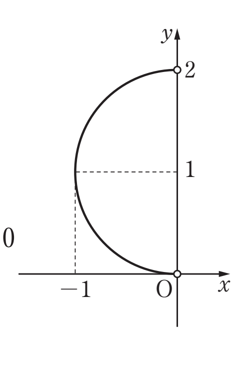
を得るので，求める図形 C は中心 -1 で半径 1 の円上の虚部が正の部分．よって求める図は右図．



(3)　$w=\dfrac{iz}{z+1}$ より $(w-i)z=-w$ となるが，$w=i$ とすると z は解をもたなくなるので不適．よって $w\neq i$ なので $z=\dfrac{-w}{w-i}$ とできる．これを(2)の結果より得られる $|z+1|=1$ かつ $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}>0$ に代入すると

$$\left|\frac{-w}{w-i}+1\right|=1 \text{ かつ } \frac{\dfrac{-w}{w-i}-\dfrac{-\overline{w}}{\overline{w}+i}}{2i}>0$$

$$\iff \left|\frac{-i}{w-i}\right|=1 \text{ かつ } \frac{w+\overline{w}}{|w-i|^2}<0 \iff |w-i|=1 \text{ かつ } \frac{w+\overline{w}}{2}<0$$



となるので，求める図は右図．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$a>0$ を実数とする．$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，座標平面の３点

$$(2n\pi,\ 0),\ \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\right),\ ((2n+1)\pi,\ 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし，

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}dx,\ C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}dx$$

とおく．

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2)　極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ．

(3)　極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ．

《15 東北大・理系》

【答】（1）略　（2）$\frac{\pi}{4}$　（3）1

【解説】（1）$2n\pi\leqq x\leqq(2n+1)\pi$ より $\frac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq\frac{1}{x^a}\leqq\frac{1}{(2n\pi)^a}$ が成り立つので

$$\frac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\,dx\leqq\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}dx\leqq\frac{1}{(2n\pi)^a}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\,dx$$

を得るが，$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}=2$ より $\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$ が示された．

(2)　$A_n=\frac{1}{2}\{(2n+1)\pi-2n\pi\}\cdot\frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}=\frac{\pi}{2\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}$ であり，(1)の結果より

$\frac{(2n\pi)^a}{2}\leqq\frac{1}{B_n}\leqq\frac{\{(2n+1)\pi\}^a}{2}$ となるので

$$\frac{(2n\pi)^a}{4\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\pi\leqq\frac{A_n}{B_n}\leqq\frac{\{(2n+1)\pi\}^a}{4\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\pi\quad\text{つまり}$$

$$\frac{1}{4\left(1+\frac{1}{4n}\right)^a}\pi\leqq\frac{A_n}{B_n}\leqq\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^a}{4\left(1+\frac{1}{4n}\right)^a}\pi$$

ここで $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^a=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^a=1$ より $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　(1)，(2)と同様に$\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin^2 x\,dx=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{2x-\sin 2x}{4}\right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}=\frac{\pi}{2}$

より $\displaystyle\frac{\pi}{2\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq C_n\leqq\frac{\pi}{2(2n\pi)^a}$ となるので $\displaystyle\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4n}\right)^a}\leqq\frac{A_n}{C_n}\leqq\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^a}{\left(1+\frac{1}{4n}\right)^a}$ を得る．

(2)と同様に$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}=\mathbf{1}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少することを示せ．

(2)　不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ．

(3)　n を 3 以上の整数とするとき，不等式

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\frac{1}{\log 2}$$

が成り立つことを示せ．

《15 九大・理系》

【答】 (1)　略　(2)　$-\dfrac{1}{\log x}+C$（C は積分定数）　(3)　略

【解説】 (1)　$y=x^{-1}(\log x)^{-2}$ より

$y'=-x^{-2}\cdot(\log x)^{-2}+x^{-1}\cdot(-2)(\log x)^{-3}\cdot\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\log x+2}{x^2(\log x)^3}$ であり，$x>1$ のとき

$\log x>0$ なので，$y'<0$．

よって $x>1$ において単調に減少することが示された．

(2)　$\left\{-(\log x)^{-1}\right\}'=(\log x)^{-2}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ より

$\displaystyle\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx=\boldsymbol{-\frac{1}{\log x}+C}$ **（C は積分定数）**

(3)　3 以上の整数 k に対し，(1)の結果より $1<x<k$ のとき

$$\frac{1}{x(\log x)^2}>\frac{1}{k(\log k)^2}$$

が成り立つので

$$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x(\log x)^2}dx>\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k(\log k)^2}dx \text{ つまり } \int_{k-1}^{k}\frac{1}{x(\log x)^2}dx>\frac{1}{k(\log k)^2}$$

が成り立つ．この最後の式において $k=3,\ 4,\ \cdots,\ n$ を代入したものの和をとることで

$\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\int_{2}^{n}\frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を得るが，

$\displaystyle\int_{2}^{n}\frac{1}{x(\log x)^2}dx=\left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^n=\frac{1}{\log 2}-\frac{1}{\log n}$ であることと $\dfrac{1}{\log n}>0$ より

$\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\frac{1}{\log 2}$ が示された．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。